

ФСУ

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Теорема Виета

$$x^2 + px + q = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Разложение квадратного трёхчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Степени

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Показательное уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Логарифмы

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Теорвер

Классическое определение

$$P = \frac{m}{n}, \quad \text{где } m - \text{благоприятные}, \quad n - \text{все возможные}$$

Противоположные события (если в исходах может быть только или одно, или другое)

$$P(A) + P(B) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(B)$$

Независимые события (если (не) наступление одного не зависит от (не) наступления другого)

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

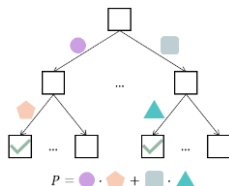
Несовместные события (если наступление одного исключает наступление другого)

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Совместные события (если наступление одного не исключает наступление другого)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Деревья



Вдоль цепочек умножай, результаты прибавляй

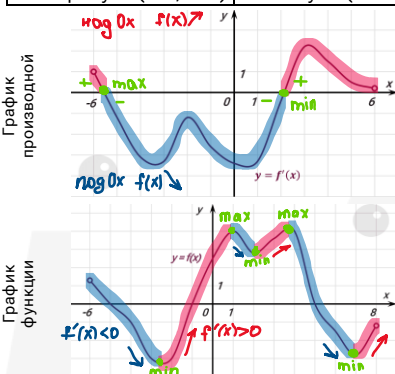
Количество комбинаций у кубика и монетки

$$N_{\text{куб}} = 6^k, \quad \text{где } k - \text{количество бросков}$$

$$N_{\text{мон}} = 2^m, \quad \text{где } m - \text{количество бросков}$$

Производные для №8

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
Возрастает ↗	Положительная (над Ox)
Убывает ↘	Отрицательная (под Ox)
В экстремуме (min, max)	Равна нулю (на Ox)

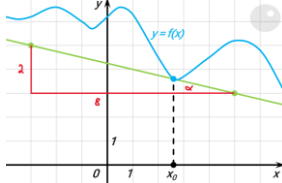


Геометрический смысл производной для №8

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0 — это тангенс угла наклона её касательной.

$$f'(x_0) = \tan \alpha = \frac{\text{вертикаль}}{\text{горизонталь}}$$

Если касательная возрастает, тангенс угла наклона будет положительным, если убывает — отрицательным.



$$f'(x_0) = -\tan \alpha = -\frac{2}{8} = -0,25$$

Таблица производных

$$C' = 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Правила взятия производных

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции

$$[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

*Сложная функция — это функция от функции.

$$\begin{aligned} \bullet (e^{-2x})' &= e^{-2x} \cdot (-2x)' = -2e^{-2x} \\ \bullet [\ln(7-x)]' &= \frac{1}{7-x} \cdot (7-x)' = \frac{1}{x-7} \end{aligned}$$

Точки экстремума (алгоритм к №12)

- Находим производную функции $f'(x)$.
- Приравниваем производную к нулю — находим точки экстремума $f'(x) = 0$.
- Расставляем точки экстремума на оси и находим знаки производной в интервалах. Расставляем поведение функции:



- Если функция ↗ — точка максимума, если ↘ — точка минимума.

Наибольшее/наименьшее значение на отрезке $[a, b]$ (алгоритм к №12)

- Находим точки экстремума $f'(x) = 0$ и определяем, min или max они (алгоритм №12).
- Если нужная точка (max/min) попадает в $[a, b]$, то наиб/наим значение функции будет в этой точке. Если не попадает — в одном из концов отрезка.

Лайфхаки для наиб/наим значений

Натуральный логарифм должен быть нормальным:

$$\begin{aligned} y &= 8 \ln(x+7) - 8x + 3 & \rightarrow & \ln 1 = 0 & \rightarrow & x = -6 \\ y &= 12x - \ln(12x) + 4 & \rightarrow & \ln 1 = 0 & \rightarrow & x = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Экспонента должна быть нормальной, если она стоит с многочленом в скобках:

$$y = (7x^2 - 56x + 56)e^{x-1} \rightarrow e^0 = 1 \rightarrow x = 1$$

НО! Если экспонента одна, это не работает:

$$y = e^{2x} - 8e^x + 7 \text{ решаем по алгоритму.}$$

Функции от параболы

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

$$y = \log_k(ax^2 + bx + c)$$

$$y = k^{ax^2 + bx + c}$$

Нужное значение будет в вершине параболы

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ — в точке } x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Векторы

$$\vec{a}(x_1, y_1) \leftarrow \begin{cases} x_1 = x_B - x_A \\ y_1 = y_B - y_A \end{cases}$$

Длина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Умножение вектора на число k

$$k \cdot \vec{a}(k \cdot a_x; k \cdot a_y)$$

Сложение/вычитание векторов

$$\vec{a} \pm \vec{b}(a_x \pm b_x; a_y \pm b_y)$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

* α — угол между векторами.

Стереометрия

Прямые тела



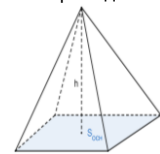
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$S_{\text{пп}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бп}}$$

$$S_{\text{бп}} = P_{\text{осн}} \cdot h$$

Зауженные тела

Пирамида

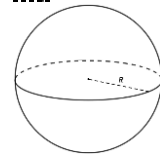


$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$S_{\text{пп}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бп}}$$

$$S_{\text{бп}} \text{ складываем из частей}$$

Шар



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

$$\left(\frac{4}{3} \pi R^3\right)' = 4\pi R^2$$

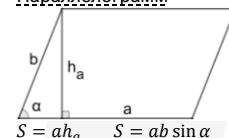
$$\text{Длина окружности: } (\pi R^2)' = 2\pi R$$

Планиметрия. Площади фигур

Круг

$$S_{\text{о}} = \pi R^2$$

Параллелограмм



$$S = ah_a$$

$$S = ab \sin \alpha$$

Ромб

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

d_1, d_2 — диагонали ромба

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = mh$$

m — средняя линия трапеции

Прямоугольник и квадрат

$$S = ab$$

$$S = a^2$$

Для всех

$$S = pr, \quad \text{где } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

r — радиус вписанной окр.

Планиметрия. Окружности

Касательная и радиус в точку касания перпендикулярны

$$R \perp l$$

Отрезки касательных из одной точки равны

$$AP = AD$$

Центральный угол

- вершина — центр окружности
- равен дуге

Вписанный угол

- вершина — точка окружности
- равен половине дуги

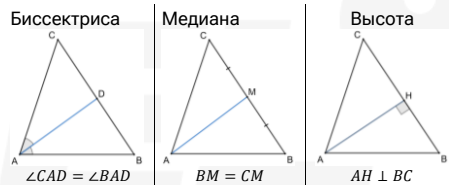
Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90° .

AB — диаметр

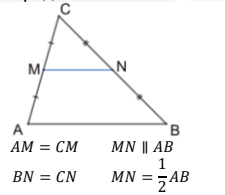
$$\angle ACB = 90^\circ$$

Планиметрия. Треугольники

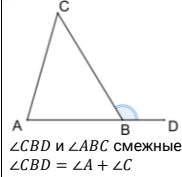
Важные элементы в треугольнике



Средняя линия



Внешний угол

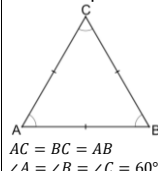


Виды треугольников

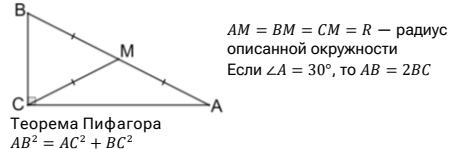
Равнобедренный



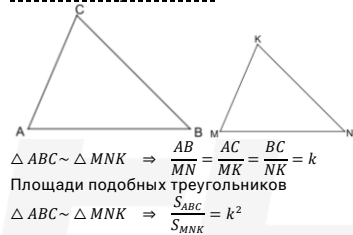
Равносторонний



Правильный

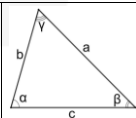


Подобие треугольников



Теорема синусов

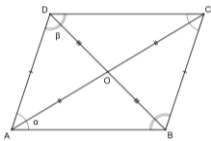
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Планиметрия. Четырёхугольники

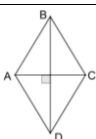
Параллелограмм

$AB = CD$, $AD = BC$
 $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
 $\angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ$
 $AO = CO$, $BO = DO$



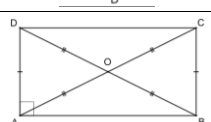
Ромб

$AB = CD = AD = BC$
 $AC \perp BD$
 + все свойства параллелограмма



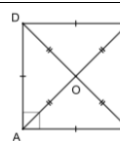
Прямоугольник

$AC = BD$
 $AB \perp BC$
 + все свойства параллелограмма



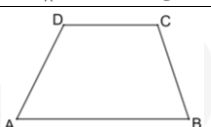
Квадрат

$AD = CD$
 + все свойства ромба и прямоугольника

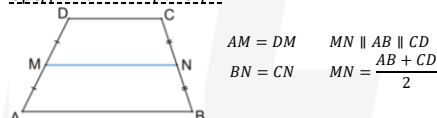


Трапеция

$AB \parallel CD$, $AD \nparallel BC$
 $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180^\circ$

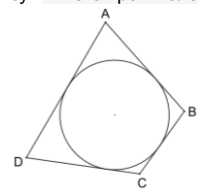


Средняя линия трапеции



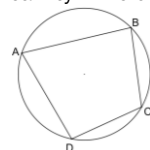
Вписанные и описанные окружности для четырёхугольника

В четырёхугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны:



$$AB + CD = AD + BC$$

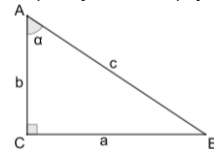
Вокруг четырёхугольника можно описать окружность, если суммы его противоположных углов равны по 180° :



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

Тригонометрия

В прямоугольном треугольнике



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Таблица

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

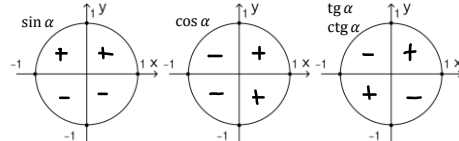
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Чётность и нечётность функций

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Знаки функций в четвертях



Периодичность функций

У $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ период 2π :
 $\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin \alpha$ $\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos \alpha$
 n — любое целое число.

У $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ период π :
 $\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg} \alpha$ $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$
 n — любое целое число.

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Следствия:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Пример 1.
 Найти $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.

Решение
 α лежит в 4 четверти, значит, $\sin \alpha < 0$.

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - (\frac{12}{13})^2} = -\frac{5}{13}$$

Пример 2.

Найти $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$.

Решение
 α лежит в 3 четверти, значит, $\cos \alpha < 0$.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - (\frac{5}{\sqrt{26}})^2} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{5}{\sqrt{26}}}{(-\frac{1}{\sqrt{26}})} = 5$$

Двойные углы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Пример.

$$\frac{35 \sin 35^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{35 \cdot 2 \cdot \sin 35^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{35 \cdot \sin(2 \cdot 35^\circ)}{\sin 70^\circ} = \frac{35 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 70^\circ} = 35$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Пример.

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{-24(\cos^2 17^\circ - \sin^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{-24 \cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} = -24$$

Следствия:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Пример 1.

Найдите $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,3$.

Решение

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot (-0,3)^2 = 1 - 2 \cdot 0,09 = 1 - 0,18 = 0,82$$

Пример 2.

$$\sqrt{12} \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3} (\sqrt{4} \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1) = \sqrt{3} (2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1) = \sqrt{3} \cdot \cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Формулы приведения (алгоритм)

Это формулы, которые триг. функцию с таким углом $(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ приводят к триг. функции с углом α . В общем виде они выглядят так:

$$\begin{matrix} \sin \\ \cos \\ \operatorname{tg} \\ \operatorname{ctg} \end{matrix} \left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha \right) = \pm \begin{matrix} \sin \\ \cos \\ \operatorname{tg} \\ \operatorname{ctg} \end{matrix} (\alpha) \quad \text{или} \quad \begin{matrix} \sin \\ \cos \\ \operatorname{tg} \\ \operatorname{ctg} \end{matrix} \left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha \right) = \pm \begin{matrix} \cos \\ \sin \\ \operatorname{ctg} \\ \operatorname{tg} \end{matrix} (\alpha)$$

1. Определяем, будет меняться функция (второй вариант формул) или не будет (первый вариант формул). Это зависит от того, каким было число n . Если n нечётное (например, углы $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ и подобное), тогда функция будет меняться, если n чётное (например, углы $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{2}$, $\frac{10\pi}{2}$), функция меняться не будет.

2. Определяем знак перед функцией. Знак перед новой функцией ставится такой, какой был у старой функции (это мы смотрим по четвертям).

Пример 1.

$$\cos \frac{17\pi}{6} = \cos \left(\frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(3\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

3π — функция не меняется (так и будет косинус)

$3\pi - \frac{\pi}{6}$ — угол 2 четверти, косинус во второй четверти отрицательный, значит, перед новой функцией ставим знак минус.

$$\cos \left(3\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 2.

$$\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ)$$

$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ — функция меняется (вместо косинуса будет синус)

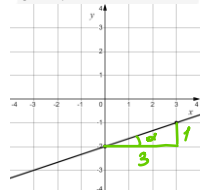
$90^\circ + 45^\circ$ — угол 2 четверти, синус во второй четверти положительный, значит, перед новой функцией ставим знак плюс.

$$\sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Графики функций

Прямая $y = kx + b$

- Коэффициент k — тангенс угла наклона. Если угол острый (прямая возрастает), то $k > 0$. Если угол тупой (прямая убывает), то $k < 0$.
- Коэффициент b — пересечение прямой с осью Oy . Если пересечения не видно, ищем b через подстановку точки.



$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

$$b = -2$$

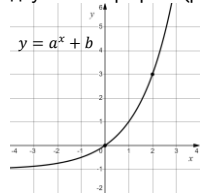
$$y = \frac{1}{3}x - 2$$

Показательная и логарифмическая функции

$$y = a^x, y = a^x + b, y = a^{x+b}$$

$$y = \log_a x, y = \log_a x + b, y = \log_a(x + b)$$

Если неизвестен один коэффициент a , ищем его через подстановку одной точки графика. Если неизвестно два коэффициента a и b , ищем их через подстановку двух точек графика (решаем систему).



Подставляем две точки

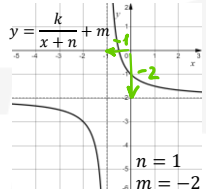
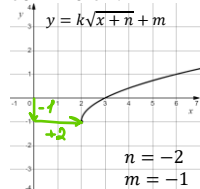
$(0; 0)$ и $(2; 3)$:

$$\begin{cases} 0 = a^0 + b \\ 3 = a^2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$y = 2^x - 1$$

Корень $y = k\sqrt{x+n} + m$ и гипербола $y = \frac{k}{x+n} + m$

Коэффициенты n и m определяем по сдвигам. n — сдвиг по оси Ox (всегда берём с противоположным знаком), m — сдвиг по оси Oy (берём как есть). Сдвиг корня определяем по его вершине (изначально она в точке $(0; 0)$). Сдвиг гиперболы определяем по асимптотам:



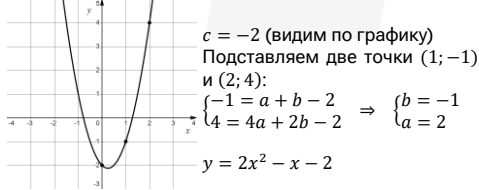
$$n = -2$$

$$m = -1$$

Коэффициент k определяем подстановкой любой точки графика.

Парабола со сдвигом $y = a(x + n)^2 + m$
Если у параболы чётко видно вершину, определяем сдвиги по ней, аналогично корню и гиперболе. Коэффициент a определяем через подстановку любой точки параболы.

Парабола без сдвига $y = ax^2 + bx + c$
В этом случае у параболы не видно чётко вершину. Начинаем с коэффициента c — пересечение параболы с осью Oy . Коэффициенты a и b определяем через подстановку двух точек параболы.



Для всех
• Если нужно найти $f(a)$, подставляем $x = a$ в функцию.
• Если нужно найти x , при котором $f(x) = a$, приравниваем $f(x) = a$ и решаем уравнение.

Текстовые задачи на движение (№10)

Общая формула

$$S = Vt \Rightarrow \begin{cases} 1) V = \frac{S}{t} \\ 2) t = \frac{S}{V} \end{cases}$$

S — пройденный путь
 V — скорость движения
 t — время движения

Таблица

Скорость	Время	Расстояние
V , км/ч	t , ч	S , км

Совместная скорость

• Если едут в разные стороны:
 $V_{\text{совместная}} = V_1 + V_2$
• Если едут в одну сторону:
 $V_{\text{совместная}} = |V_1 - V_2|$

Движение по воде

$V_{\text{по течению}} = V + V_{\text{течения}}$
 $V_{\text{против течения}} = V - V_{\text{течения}}$

Течение либо помогает движению (тогда прибавляем скорость течения к собственной скорости), либо мешает (тогда вычитаем скорость течения из собственной скорости). В некоторых задачах скорости течения нет — если предмет движется по озеру. В задачах с плотом плот движется со скоростью течения, так как собственной скорости не имеет.

Средняя скорость

Средняя скорость движения — это не среднее арифметическое скоростей! Это весь пройденный путь, делённый на всё затраченное время:

$$V_{\text{сред}} = \frac{S_{\text{весь}}}{t_{\text{общее}}}$$

Пример.
Первую половину трассы турист ехал со скоростью 12 км/ч, а вторую — со скоростью 8 км/ч. Найдите среднюю скорость туриста на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение
Обозначим весь путь за $2S$ км, тогда:

$$1\text{-ый участок: } S_1 = S \text{ км}, V_1 = 12 \text{ км/ч} \Rightarrow t_1 = \frac{S}{V_1} = \frac{S}{12} \text{ ч}$$

$$2\text{-ой участок: } S_2 = S \text{ км}, V_2 = 8 \text{ км/ч} \Rightarrow t_2 = \frac{S}{V_2} = \frac{S}{8} \text{ ч}$$

Средняя скорость будет равна:

$$V_{\text{сред}} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{S + S}{\frac{S}{12} + \frac{S}{8}} = \frac{2S}{\frac{12 + 8}{24}} = \frac{2S \cdot 24}{20} = \frac{48S}{20} = \frac{12S}{5} = 9,6 \text{ (км/ч)}$$

Движение протяжённых тел

В таких задачах обычно нужно найти длину какого-то из тел. Есть две типичные ситуации:

1 ситуация: поезд/теплоход/etc. проходит мимо чего-то, не имеющего длины, например, столба. Тогда возникает вот такая история:



За время, пока поезд проезжает мимо столба, он проезжает свою длину: $l = vt$.

2 ситуация: поезд/теплоход/etc. проходит мимо чего-то, имеющего длину, например, лесополосы (или другого поезда/теплохода/etc.). Тогда возникает вот такая история:



За время, пока поезд проезжает мимо лесополосы, он проезжает длину лесополосы и свою длину: $m + l = vt$.

Аналогично действуем, если у нас два движущихся объекта (например, два поезда), только в таком случае нужно искать совместную скорость.

Как составить уравнение

• Если условие на разность времени (например, «один приехал раньше второго на сколько-то часов»), то из большего времени вычитаем меньшее время и получаем разницу.

Пример.

Первый автомобиль ехал $\frac{20}{x}$ часов, второй ехал $\frac{20}{x-2}$ часов и первый автомобиль приехал на 1 час позже. Тогда время движения первого автомобиля больше и уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x-2} = 1$$

• Если условие на сумму времени (например, «на весь путь катер затратил столько-то часов»), то складываем время на путь туда, время на путь обратно и приравниваем ко времени движения.

Пример.

Катер ехал по течению $\frac{5}{x+3}$ часа, а против течения $\frac{5}{x-3}$ часа. Всего на путь туда и обратно он затратил 15 часов, тогда уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} = 15$$

Текстовые задачи на работу (№10)

Общая формула

$$A = Pt \Rightarrow \begin{cases} 1) P = \frac{A}{t} \\ 2) t = \frac{A}{P} \end{cases}$$

A — количество работы

P — скорость работы (производительность/мощность)

t — время работы

Таблица

Скорость	Время	Работа
P , ед./ч	t , ч	A , ед.

Совместная работа

Главное правило! Складывать можно только производительности рабочих, которые работают вместе, а не их время работы.

Текстовые задачи на проценты (№10)

Как найти процент от числа

Чтобы найти процент от числа применяется пропорция. Само число при этом принимается за 100%.

Например, ищем 26% от 525:

$$\begin{array}{ccc} 525 & \times & 100\% \\ & \searrow & \nearrow \\ x & & 26\% \end{array}$$

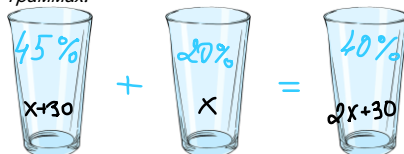
$$x \cdot 100 = 525 \cdot 26 \Rightarrow x = \frac{525 \cdot 26}{100} = 136,5$$

$$\text{Формула концентрации: } K = \frac{m_{\text{в-ва}} \cdot 100\%}{m_{\text{р-ра}}}$$

Стаканы для решения

Пример

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 45% меди, второй — 20% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 30 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 40% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.



Чтобы составить уравнение, умножаем процент на массу: $45(x + 30) + 20x = 40(2x + 30)$.

Текстовые задачи с физикой (примеры какашек в №9)

Пример 1 (выбираем меньшее, а не большее)

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время (в мин), $T_0 = 1380$ К, $a = -15$ К/мин², $b = 165$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Решение

$$T(t) \leq 1800 \Rightarrow 1380 + 165t - 15t^2 \leq 1800$$

$$1380 + 165t - 15t^2 \leq 1800$$

$$15t^2 - 165t + 420 \geq 0 \quad | :15$$

$$t^2 - 11t + 28 \geq 0$$

$$(t - 4)(t - 7) \geq 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$$

Значит, максимально прибор может работать 4 минуты (за 4 минуты он нагреется до 1800 К и может сломаться — его нужно выключить).

Пример 2 (в ответ нужна разница).

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,4 + 9t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться в высоте не менее 3 метров?

Решение

$$h(t) \geq 3 \Rightarrow 1,4 + 9t - 5t^2 \geq 3$$

$$5t^2 - 9t + 1,6 \leq 0 \quad | \cdot 5$$

$$25t^2 - 45t + 8 \leq 0$$

$$D = 45^2 - 4 \cdot 25 \cdot 8 = (40 + 5)^2 - 800 = 1600 + 400 + 25 - 800 = 1225, \sqrt{D} = 35$$

$$t_{1,2} = \frac{45 \pm 35}{2 \cdot 25}$$

$$(t - 1,6)(t - 0,2) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [0,2; 1,6]$$

Значит, мяч был на высоте не менее 3 метров с 0,2 с по 1,6 с своего полёта. Это $1,6 - 0,2 = 1,4$ с.

Пример 3 (задача с оценкой).

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может меняться в пределах от 20 см до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение будет чётким, если выполняется соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Решение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$$

Т.к. d_1 должно быть наименьшим, дробь $\frac{1}{d_1}$ должна быть наибольшей. Дробь $\frac{1}{d_1}$ равна разности $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$.

Разность будет наибольшей при наименьшем значении вычитаемого, т.е. дроби $\frac{1}{d_2}$. Наименьшее значение дроби $\frac{1}{d_2}$ будет принимать при наибольшем значении знаменателя d_2 . По условию максимальное d_2 равно 180 см. Подставим в уравнение:

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} = \frac{6-1}{180} = \frac{5}{180} = \frac{1}{36} \Rightarrow d_1 = 36 \in [20; 40].$$

Пример 4 (с. тригрой).

Плоский замкнутый контур площадью $S = 0,5$ м² находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS \cos \alpha$, где α — острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 4 \cdot 10^{-4}$ Тл/с — постоянная, S — площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м²). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать 10^{-4} В?

Решение

$$\varepsilon_i \leq 10^{-4} \Rightarrow aS \cos \alpha \leq 10^{-4}$$

$$4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 \cdot \cos \alpha \leq 10^{-4} \quad | : 10^{-4}$$

$$2 \cos \alpha \leq 1 \quad | : 2$$

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

По условию угол α острый, т.е.

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

Пример 5 (неприятная про рейтинг).

Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности ln , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -2 до 2 . Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится втрое, а информативность — вдвое дороже, чем оперативность. В результате, формула примет вид $R = \frac{3ln + Op + 2Tr}{A}$. Каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 30?

Решение

$$R = \frac{3ln + Op + 2Tr}{A}, R = 30, ln = Op = Tr = 2 - \text{наибольшая возможная оценка.}$$

$$30 = \frac{3 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 2}{A}$$

$$30 = \frac{12}{A} \Rightarrow A = \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = 0,4$$

